$$CH_3COO^-_{(aq)} + H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows CH_3COO^-_{(aq)} + HO^-_{(aq)}$$

1-2- Tableau d'avancement de la réaction :

Equation de la réaction		CH_3COO^-	$+ H_2O$	$\rightleftarrows CH_3COO^-$	$+ HO^-$
états	avancement	quantité de matière (en mol)			
Etat initial	0	$C_1.V$	excès	0	0
Etat de transformation	**x**	$C_1.V$-**x**	excès	**x**	**x**
Etat d'équilibre	**$x_{éq}$**	$C_1.V$-**$x_{éq}$**	excès	**$x_{éq}$**	**$x_{éq}$**

$x_{max} = C_1.V$ $\Rightarrow$ $C_1.V - x_{max} = 0$ $\Rightarrow$ L'eau est utilisée en excès donc CH_3COO^- est le réactif limitant :

D'après le tableau d'avancement on a : $[HO^-]_{éq} = \dfrac{x_{éq}}{V}$

D'après le produit ionique de l'eau on a $[HO^-]_{éq} = \dfrac{Ke}{10^{-14}}$

donc: $\dfrac{x_{éq}}{V} = \dfrac{Ke}{10^{-14}} \Rightarrow x_{éq} = \dfrac{K_e.V}{10^{-14}}$

Le taux d'avancement de la réaction: $\tau_1 = \dfrac{x_f}{x_{max}}$, la réaction est limitée, donc $x_f = x_{éq}$ .donc : $\tau_1 = \dfrac{x_{éq}}{x_{max}} = \dfrac{K_e}{C_1.10^{-pH}}$

A.N: $C_1 = \dfrac{m}{M.V} = \dfrac{0{,}410}{82 \times 0{,}5} = 10^{-2} mol/L$ donc: $\tau_1 = \dfrac{10^{-14}}{10^{-2}.10^{-8,4}} = 2{,}51.10^{-4}$

1-3- La constante d'équilibre associée à la réaction :

$$K = \frac{[HO^-]_{éq} \times [CH_3COO^-]_{éq}}{[CH_3COOH]_{éq}} = \frac{\frac{x_{éq}}{V} \times \frac{x_{éq}}{V}}{\frac{C_1.V - x_{éq}}{V}} = \frac{x_{éq}^{\ 2}}{V(C_1.V - x_{éq})}$$

et on a : $\tau_1 = \dfrac{x_{éq}}{x_{max}} = \dfrac{x_{éq}}{C_1.V}$ donc: $x_{éq} = \tau_1.C_1.V$

en remplaçant on obtient : $K = \dfrac{x_{éq}^{\ 2}}{V(C_1.V - x_f)} = \dfrac{\tau_1^{\ 2}.C_1}{1-\tau_1}$; donc: $K = \dfrac{\tau_1^{\ 2}.C_1}{1-\tau_1} = \dfrac{(2{,}51.10^{-4})^2.10^{-2}}{1-2{,}51.10^{-4}} = 6{,}3.10^{-10}$

1-4- La température est constante, donc la constante d'équilibre garde la même valeur.

$K = \dfrac{\tau_2^{\ 2}.C_2}{1-\tau_2} \Rightarrow C_2.\tau_2^{\ 2} + K.\tau_2 - K = 0$, il y'a deux solutions : $\dfrac{-K \pm \sqrt{\Delta}}{2.C_2}$, le taux d'avancement $\tau_2 > 0$

donc: $\tau_2 = \dfrac{-K + \sqrt{\Delta}}{2.C_2}$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{K^2 + 4K.C_2} = \sqrt{(6{,}3.10^{-10})^2 + 4 \times 6{,}3 \times 10^{-10} \times 10^{-3}} = \sqrt{2{,}5.10^{-12}} = 1{,}58.10^{-6}$

donc: $\tau_2 = \dfrac{-K + \sqrt{\Delta}}{2.C_2} = \dfrac{-6{,}3.10^{-10} + 1{,}58.10^{-6}}{2.10^{-3}} = 7{,}9.10^{-4}$, on a : $\tau_2 > \tau_1$, donc le taux d'avancement final augmente par dilution de la solution.

2) 2-1-a) D'après la relation $\boxed{\sigma = 81{,}9 + 1{,}37.10^4.x}$ avec σ en $mS.m^{-1}$ et x en mol ,on a $\boxed{\rho_{éq} = 81{,}9 + 1{,}37.10^4.x_{éq}}$

$x_{éq} = \dfrac{\sigma_{éq} - 81{,}9}{1{,}37.10^4}$ A.N: $x_{éq} = \dfrac{83{,}254 - 81{,}9}{1{,}37.10^4} = 9{,}88.10^{-5} mol$

Tableau d'avancement de la réaction :

Equation de la réaction		CH_3COO^-	$+ HCOOH$	$\rightleftarrows CH_3COOH +$	$HCOO^-$
états	avancement	quantité de matière (en mol)			
Etat initial	0	$C_1.V$	$C_2.V$	0	0
Etat de transformation	**x**	$C_1.V$-**x**	$C_2.V$-**x**	**x**	**x**
Etat d'équilibre	**$x_{éq}$**	$C_1.V$- **$x_{éq}$**	$C_2.V$- **$x_{éq}$**	**$x_{éq}$**	**$x_{éq}$**

$[CH_3COOH]_{éq} = [HCOO^-]_{éq} = \dfrac{x_{éq}}{V_S}$, $[CH_3COO^-]_{éq} = \dfrac{C_1.V_1 - x_{éq}}{V_S}$, $[HCOOH]_{éq} = \dfrac{C_2.V_2 - x_{éq}}{V_S}$

$$K = \frac{[CH_3COOH]_{éq} \times [HCOO^-]_{éq}}{[CH_3COO^-]_{éq} \times [HCOOH]_{éq}} = \frac{\frac{x_{éq}}{V_S} \times \frac{x_{éq}}{V_S}}{\left(\frac{C.V_1 - x_{éq}}{V_S}\right) \times \left(\frac{C.V_2 - x_{éq}}{V_S}\right)} = \frac{x_{éq}^{\ 2}}{(CV_1 - x_{éq}) \times (CV_2 - x_{éq})}$$

A.N: $K = \dfrac{(9{,}88.10^{-5})^2}{(10^{-2}.0{,}09 - 9{,}88.10^{-5}).(10^{-2}.10^{-2} - 9{,}88.10^{-5})} \approx 10$

b) La constante d'équilibre : $K = \dfrac{K_A(HCOOH / HCOO^-)}{K_A(CH_3COOH / CH_3COO^-)} = \dfrac{K_{A2}}{K_{A1}} \Rightarrow K_{A2} = K_{A1}.K = 10 \times 1{,}6.10^{-5} = 1{,}6.10^{-4}$

2-2- On a : $pH = pk_{A1} + \ell og\dfrac{[CH_3COO^-]_{eq}}{[CH_3COOH]_{eq}}$

$$= -\ell og k_{A1} + \ell og\frac{C.V_1 - x_{eq}}{x_{eq}} = -\ell og 1{,}6.10^{-5} + \ell og\frac{10^{-2}.0{,}09 - 9{,}88.10^{-5}}{9{,}88.10^{-5}} = 4{,}796 + 0{,}909 = 5{,}7$$

Autre méthode : $pH = pk_{A2} + \ell og\dfrac{[HCOO^-]_{eq}}{[HCOOH]_{eq}}$

$$= -\ell og k_{A2} + \ell og\frac{x_{eq}}{C.V_2 - x_{eq}} = -\ell og 1{,}6.10^{-4} + \ell og\frac{9{,}88.10^{-5}}{10^{-2}.0{,}01 - 9{,}88.10^{-5}} = 3{,}796 + 1{,}915 = 5{,}7$$

On a : $pH > pK_{A1}$ et : $pH > pK_{A2}$ $\Rightarrow$, les deux espèces prédominantes sont : CH_3COO^- et : $HCOO^-$.

2ème partie :

1) 1-1- D'après la courbe de la figure (2) on a : $C_o = [Cu^{2+}]_i = 5.10^{-2}$mol

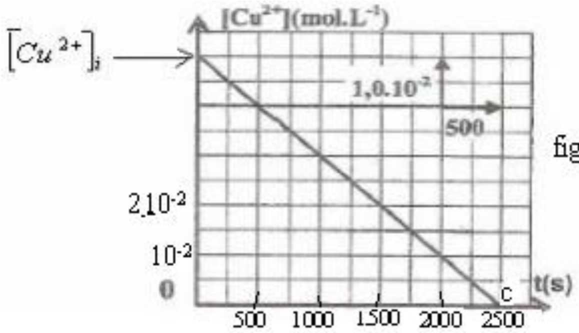


figure (2)

Constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction :

$$3Cu_{(s)} + 2Al^{3+}_{(aq)} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftharpoons}} 3Cu^{2+}_{(aq)} + 2Al_{(s)} \text{ est } K = 10^{-20}.$$

$Q_{r,i} = \dfrac{[Cu^{2+}]_i^3}{[Al^{3+}]_i^2} = \dfrac{C_o^{\,3}}{C_o^{\,2}} = C_o = 5.10^{-2}$ On a: $Q_{r,i} > K$ donc , le système évolue dans le sens inverse.

L'équation de la réaction au cour du fonctionnement de la pile s'écrit : $3Cu^{2+}_{(aq)} + 2Al_{(s)} \rightarrow 3Cu_{(s)} + 2Al^{3+}_{(aq)}$

1-2- D'après l'équation de la réaction, on déduit que l'électrode de l'aluminium représente le pole négatif de la pile et celle de cuivre son pole positif:

la représentation conventionnelle de la pile étudiée : $\ominus\ Al \mid Al^{3+} \,\vdots\vdots\, Cu^{2+} \mid Cu\ \oplus$

2) 2-1- Tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$3Cu^{2+}$ +	$2Al$ $\rightarrow$	$3Cu$ +	$2Al^{3+}$
états	avancement	quantité de matière (en mol)			
Etat initial	0	$C_o.V$	$n_o(Al)$	$n_o(Cu)$	$C_o.V$
Etat de transformation	x	$C_o.V-3x$	$n_o(Al)-2x$	$n_o(Cu)+3x$	$C_o.V+2x$

D'après la demi-équation : $Cu^{2+} + 2.e^- \rightleftharpoons Cu$

La quantité de matière de Cu^{2+} réagissant est : $n(Cu^{2+})_{réagissant} = \dfrac{n(e^-)}{2}$

D'après le tableau d'avancement : $n(Cu^{2+})_{réagissant} = 3x$

$\Rightarrow 3x = \dfrac{n(e^-)}{2}$ avec: $n(e^-) = \dfrac{I.\Delta t}{F}$

$\Rightarrow 3x = \dfrac{I.\Delta t}{2.F}$ donc : $\boxed{x = \dfrac{I.\Delta t}{6.F}}$ **(a)**

La concentration des ions Cu^{2+} à l'instant t :

$$[Cu^{2+}]_t = \frac{Co.V - 3x}{V} = C_o - 3\frac{x}{V} = C_o - \frac{I.t}{2.F.V} \Rightarrow [Cu^{2+}]_t = C_o - \frac{I.t}{2.F.V}$$

2-2-D'après la courbe de la figure (2) la concentration des ions Cu^{2+} s'annule à l'instant t_o= 2500s.

$[Cu^{2+}]_t = 0 \Rightarrow C_o - \frac{I.t}{2.F.V} = 0 \Rightarrow C_o = \frac{I.t_c}{2.F.V}$ donc $I = \frac{2.F.V.C_o}{t_c} = \frac{2\times 96500\times 50\times 10^{-3}\times 5\times 10^{-2}}{2500} \approx 0{,}19A$

3) Lorsque la concentration des ions Cu^{2+}, la pile est entièrement usée. Les ions Cu^{2+}, à cet instant jouent le rôle du réactif limitant, donc : $C_o.V-3x_{max}=0$

D'après **(a)** : $x_{max} = \frac{I.t_C}{6F}$, et d'après le tableau d'avancement : $\Delta n(Al) = -2x_{max}$, à la fin de la réaction.

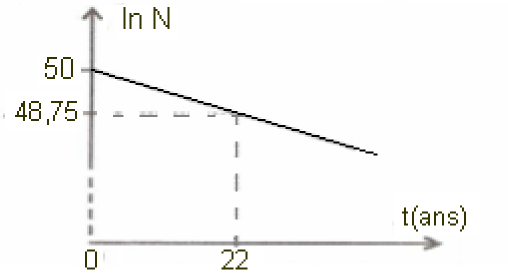
$$\Delta m(Al) = M_{(Al)}\times \Delta n(Al) \Rightarrow \Delta m(Al) = -\frac{I.t_C.M_{(Al)}}{3F} = -\frac{0{,}19\times 2500\times 27}{3\times 96500} = -0{,}044g = -44mg$$

Physique : Exercice 1 : Les réactions nucléaires des isotopes d'hydrogène

1.1- L'équation de la désintégration : ${}^3_1H \rightarrow {}^3_2He + {}^{0}_{-1}e$

1-2- $N = N_o.e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln N = \ln N_o + \ln .e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln N = \ln N_o - \lambda.t$ d'où: $\ln N = -\lambda.t + \ln N_o \Rightarrow$ la courbe $\ln N = f(t)$ est une fonction affine de coefficient directeur égal à : $-\lambda$.

$\lambda = \left|\frac{\Delta \ln N}{\Delta t}\right| = \left|\frac{50-48{,}75}{0-22}\right| = \left|-56{,}8.10^{-3}\right| = 56{,}8.10^{-3} ans^{-1}$ et : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx 12{,}2ans$



2) 2-1- Le domaine (1) est le domaine des nucléides sont susceptibles de subir la fusion nucléaire car ces nucléides sont légers.

2.2-Equation de la réaction nucléaire : ${}^2_1H + {}^3_1H \rightarrow {}^4_2He + {}^1_0n$

La valeur absolue de l'énergie que l'on peut obtenir à partir de la réaction de fusion du tritium et du deutérium extrait de 1 m^3 de l'eau de mer .

$$|\Delta E| = N.|m({}^{0}_{-1}n) + m({}^4_2He) - m({}^3_1H) - m({}^2_1He)|.c^2$$

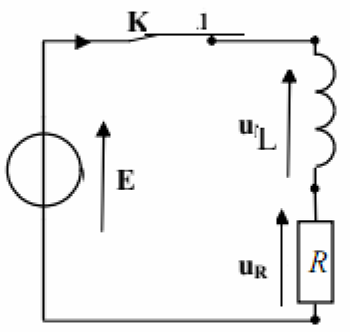
$$M({}^2_1H) = 2{,}013355\times 1{,}66.10^{-27}.10^3 \times 6{,}02.10^{23} \approx 2{,}012 g/mol$$

Le nombre de nucléides existant dans $1m^3$ d'eau de mer: $N = \frac{m({}^2_1H)}{M({}^2_1H)}\times N_A = \frac{33g}{2{,}012}\times 6{,}02.10^{23} = 9{,}87.10^{24}$

$$|\Delta E| = 9{,}87\times 10^{24}\times 0{,}01889\times 931{,}5 = 1{,}7367.10^{26} \approx 1{,}74.10^{26} MeV$$

Exercice 2 :

1) 1-1- a) En appliquant la loi d'additivité des tensions :



$u_L + u_R = E \Rightarrow r.i + L.\frac{di}{dt} + u_R = E$ **(1)** avec: $u_R = Ri \Rightarrow i = \frac{u_R}{R}$

et : $\frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$ en remplaçant dans (1) : $\frac{r}{R}.u_R + \frac{L}{R}.\frac{du_R}{dt} + u_R = E$

$$\Rightarrow \frac{L}{R}.\frac{du_R}{dt} + u_R(1+\frac{r}{R}) = E \Rightarrow \frac{L}{R}.\frac{du_R}{dt} + u_R\frac{(r+R)}{R} = E$$

$$\Rightarrow L.\frac{du_R}{dt} + (r+R)u_R - R.E = 0$$

b) La solution : $u_R = U_o(1-e^{-\lambda.t}) = U_o - U_o.e^{-\lambda.t} \Rightarrow \frac{du_R}{dt} = \lambda.U_o.e^{-\lambda.t}$ en remplaçant dans l'équation différentielle :

$$\lambda.L.U_o.e^{-\lambda.t} + (r+R)Uo - (R+r)U_o e^{-\lambda.t} - R.E = 0 \Rightarrow U_o.e^{-\lambda.t}[\lambda.L - (R+r)] + (R+r).U_o = R.E$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda.L-(R+r)=0\\(R+r).U_o = R.E\end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{R+r}{L}} \text{ et : } \boxed{U_o = \frac{R.E}{R+r}}$$

2-1-a) $u_R = U_0\,(1-e^{-\lambda t})$, en régime permanent : $u_R = U_0 = R.I$ donc: $I = \dfrac{U_0}{R}$ avec : $U_0 = \dfrac{E.R}{R+r}$

$\Rightarrow \quad I = \dfrac{E}{R+r}$ donc : $r = \dfrac{E-U_0}{I}$ A.N: $r = \dfrac{E-U_0}{I} = \dfrac{10-7{,}6}{0{,}1} = 24\Omega$

b) $u_R = U_0(1-e^{-\lambda t}) \Rightarrow \dfrac{du_R}{dt} = \lambda.U_0.e^{-\lambda t}$, à l'instant t=0 : $\left(\dfrac{du_R}{dt}\right)_{t=0} = \lambda.U_0$ avec : $\lambda = \dfrac{R+r}{L}$

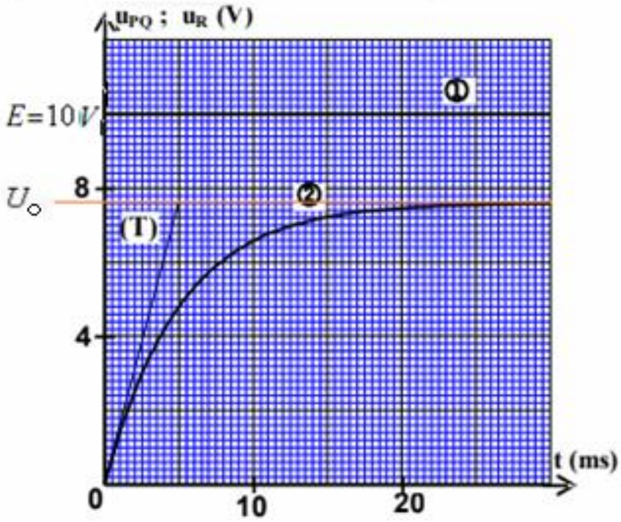
et : $R+r = \dfrac{E}{I}$ donc : $\lambda = \dfrac{E}{I.L} \Rightarrow \left(\dfrac{du_R}{dt}\right)_{t=0} = \dfrac{E.U_0}{I.L}$

D'après le coefficient directeur de la courbe à l'instant t=0 on a :

$$\left(\frac{du_R}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\Delta u_R}{\Delta t} = \frac{(4-0)V}{(2{,}5-0).10^{-3}s} = 1600V/s$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{E.U_0}{I\left(\dfrac{du_R}{dt}\right)_{t=0}} = \frac{10\times 7{,}6}{0{,}1\times 1600} = 0{,}475H \approx 0{,}5H}$$

$4V \rightarrow 20mm$
$U_0 \rightarrow 38mm$ => $U_0 = 7{,}6V$



2) 2-1-a) La courbe de la figure 4 correspond à l'état d'amortissement.
L'énergie totale du circuit RLC décroit en fonction du temps et les oscillations sont amorties à cause de la perte de l'énergie électrique par effet joule au niveau de la résistance.

b) Graphiquement, la pseudo période : $T = 2\times 7{,}91 = 15{,}82ms$, on a : $T=T_0$ donc : $T = T_0 = 2.\pi.\sqrt{L'C}$

$$\Rightarrow \quad T^2 = 4\pi^2.L'C \quad \text{donc} \quad L' = \frac{T^2}{4.\pi^2.C} = \frac{(15{,}82.10^{-3})^2}{4.\pi^2.20.10^{-6}} = 0{,}317H$$

2-2-On a : $u_C(t) = E.e^{-\frac{(r'+R)}{2.L'}.t}.\cos(\dfrac{2.\pi}{T}.t)$, montrons que r'=0

Graphiquement on a : uc=4,5V à l'instant t=T $\Rightarrow \quad 4{,}5 = E.e^{-\frac{(r'+R)}{2.L}.T}.\cos(\dfrac{2.\pi}{T}.T)$

$T = 7{,}91\times 2 = 15{,}82ms$

$$\Rightarrow \quad 4{,}5 = E.e^{-\frac{(r'+R)}{2.L'}.T}.\cos(2.\pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{4{,}5} = e^{\frac{(r'+R)}{2.L'}.T} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{E}{4{,}5} = \frac{(r'+R).T}{2.L'}$$

$$r' = \frac{2.L'.\ln\dfrac{E}{4{,}5}}{T} - R' \qquad \text{A.N:} \quad r' = \frac{2\times 0{,}317.\ln\dfrac{10}{4{,}5}}{15{,}82.10^{-3}} - 32 = 0$$

3-Emission et réception d'un signal modulé

3-1-Selon l'expression du signal modulé: $u_S(t) = A.\left[1+0{,}6\cos(10^4\pi.t)\right].\cos(2.10^5\pi.t)$

L'expression générale du signal modulé: $u_S(t) = A.\left[1+m.\cos(2\pi.F_s.t)\right].\cos(2\pi.F_p.t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\pi.F_s.t = 10^4\pi.t \Rightarrow F_s = \dfrac{10^4}{2} = 5.10^3\,Hz \Rightarrow \boxed{F_s = 5.10^3\,Hz} \\ 2.10^5\pi.t = 2\pi.F_p.t \Rightarrow \boxed{F_p = 10^5\,Hz} \\ \boxed{m=0{,}6} \end{cases}$$

Le taux de modulation : m=0,6<1 et: $F_p > 10F_S$, donc la modulation est bonne.

3-2- Pour sélectionner le signal us(t) , la fréquence propre du circuit d'accord $L'C_0$ doit être égale à la fréquence de la porteuse F_p , donc la relation suivante doit être vérifiée :

$$F = \frac{1}{2.\pi.\sqrt{L'C_0}} \Rightarrow F^2 = \frac{1}{4.\pi^2.L'.C_0} \Rightarrow C_0 = \frac{1}{4.\pi^2.L'.F^2} = \frac{1}{4.\pi^2.0{,}317\times 10^{10}} = 7{,}99\times 10^{-12} \approx 8.10^{-12}F$$

Or la capacité C_0 du condensateur est réglable entre les deux valeurs 6.10^{-12} F et 12.10^{-12} F .

La partie (1) permet donc de sélectionner le signal us(t) car: $6.10^{-12}F < C_o = 8.10^{-12}F < 12.10^{-12}F$

Par conséquence

l'utilisation de la bobine (b') d'inductance L'=0,317H dans le montage permet à la partie1 du montage de sélectionner us(t)

---

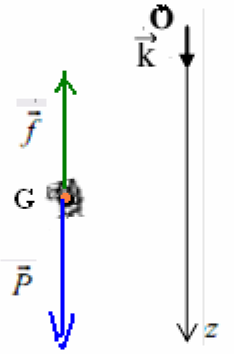
b) Pour obtenir une bonne détection d'enveloppe, la constante de temps du dipôle R_1C_1 doit vérifier la relation suivante:

$$T_p << \tau_1 < T_S \Rightarrow \frac{1}{F_p} << R_1.C_1 < \frac{1}{F_S} \Rightarrow \frac{1}{R_1.F_p} << C_1 < \frac{1}{R_1.F_S} \Rightarrow \frac{1}{30.10^3.10^5} << C_1 < \frac{1}{30.10^3.5.10^3}$$

$\Rightarrow 3{,}33nF << C_1 < 6{,}67nF$, parmi les valeurs, 10nF, 5 nF, 0,5nF, 0,1nF, la seule valeur qui convient est : C_1= 5 nF

Exercice 3 :

Première partie :



1) Système étudié {le parachutiste et ses accessoires}

Bilan des forces :Le pendule pesant est soumis à l'action des forces suivante :

$\vec{P}$: Son poids. et: $\vec{f}$: La force de frottement.

En appliquant la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}_G$

Par projection sur l'axe Oz : P-f=m. a car : $a = a_z$

$$\Rightarrow m.g - k.v^2 = m.\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = .g - \frac{k.}{m}v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = .g(1 - \frac{k.}{m.g}v^2)$$

qui est sous la forme $\frac{dv}{dt} = .g(1 - \frac{v^2}{\alpha^2}) \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} = \frac{k.}{m.g} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{m.g}{k}}$

---

2) Lorsque la vitesse limite est atteinte on a : $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow g.(1 - \frac{v_\ell^2}{\alpha^2}) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{v_\ell^2}{\alpha^2} = 0$ d'où: $\alpha = v_\ell$

La bonne réponse : **c-** la vitesse limite du système (S) .

---

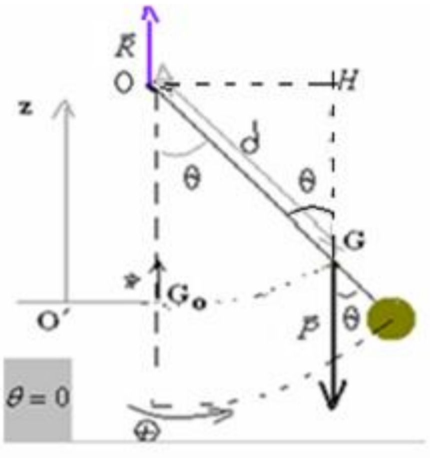
3) Graphiquement : $\alpha = v_\ell = 5m/s \Rightarrow k = \frac{m.g}{\alpha^2} = \frac{100 \times 9{,}8}{25} = 39{,}2kg.m^{-1}$

---

4) On a: $\begin{cases} a_n = g(1 - \frac{v_n^2}{\alpha^2}) \\ v_{n+1} = -7{,}84.10^{-2}.v_n^2 + v_n + 1{,}96 \end{cases}$ donc: $\begin{cases} a_n = 9{,}8 - 0{,}392.v_n^2 \\ v_{n+1} = -7{,}84.10^{-2}v_n^2 + v_n + 1{,}96 \end{cases}$

avec: $v_{n+1} = a_n.\Delta t + v_n \Rightarrow \Delta t = \frac{v_{n+1} - v_n}{a_n} = \frac{-7{,}84.10^{-2}.v_n^2 + 1{,}96}{-0{,}392.v_n^2 + 9{,}8} = \frac{-7{,}84.10^{-2}(v_n^2 - 25)}{-0{,}392(v_n^2 - 25)} = \frac{7{,}84.10^{-2}}{0{,}392} = 0{,}2s$

Deuxième partie :



1) Le système étudié {le pendule pesant}

Bilan des forces : $\vec{P}$: son poids $\vec{R}$: réaction de l'axe de rotation.

En appliquant la deuxième loi de Newton : $\boxed{\Sigma M\vec{F}_\Delta = J_\Delta.\ddot{\theta}}$

$\Rightarrow M\vec{P}_\Delta + M\vec{R}_\Delta = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$\Rightarrow -P.OH + 0 = J..\ddot{\theta}$ $OH = d.\sin\theta$

$\Rightarrow -m.g_o.d.\sin\theta = J_\Delta.\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{m.g_o.d}{J_\Delta}.\sin\theta = 0$ $m = m_1 + m_2$

pour les angles petits $\sin\theta \approx \theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{(m_1 + m_2)g_o.d}{J_\Delta}.\theta = 0}$

Equation différentielle que vérifie l'angle θ dans le cas de faibles oscillations .

1.2- la solution de l'équation différentielle soit $\theta = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

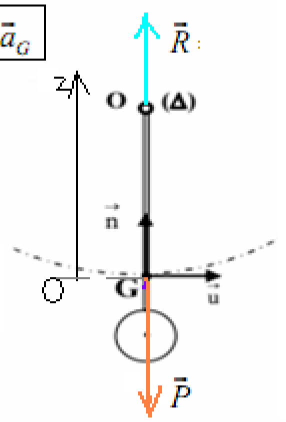
$$\Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{2.\pi}{T_o}.\theta_o.\sin\left(\frac{2.\pi}{T_o}.t\right) \text{ , et: } \ddot{\theta} = -\frac{4.\pi^2}{T_o^2}.\theta_o.\cos\left(\frac{2.\pi}{T_o}.t\right) = -\frac{4.\pi^2}{T_o^2}.\theta$$

En remplaçant dans l'équation différentielle précédente : $-\dfrac{4.\pi^2}{T_o^{\,2}}.\theta+\dfrac{(m_1+m_2).g_o.d}{J_\Delta}.\theta=0 \ \Rightarrow$

$$\frac{(m_1+m_2).g_o.d}{J_\Delta}.\theta=\frac{4.\pi^2}{T_o^{\,2}}.\theta \quad\Rightarrow\quad \frac{(m_1+m_2).g_o.d}{J_\Delta}=\frac{4.\pi^2}{T_o^{\,2}} \Rightarrow T_o^{\,2}=\frac{4.\pi^2.J_\Delta}{(m_1+m_2).g_o.d} \text{ donc: } T_o=2.\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{(m_1+m_2).g_o.d}}$$

A.N: $\quad \pi^2=10 \quad\Rightarrow\quad T_o=2.\sqrt{10}.\sqrt{\dfrac{9{,}8.10^{-2}}{200.10^{-3}\times 9{,}8\times .0{,}5}}=2s$

1-3- En appliquant la deuxième loi de Newton à la position d'équilibre on a : $\boxed{\vec{P}+\vec{R}=(m_1+m_2).\vec{a}_G}$



En projetant sur la normale : $\quad -P+R_n=(m_1+m_2).\dfrac{v^2}{d}$

$$\Rightarrow\quad R_n=(m_1+m_2).g_o+(m_1+m_2).\frac{v^2}{d}$$

En projetant sur la tangente : $\ 0+R_t=(m_1+m_2).\dfrac{dv}{dt} \quad$ avec : $v=d.\dot{\theta} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt}=d.\ddot{\theta}$

donc: $\quad R_t=(m_1+m_2).d.\ddot{\theta}$

le pendule pesant de sa position d'équilibre stable d'un angle $\theta_0=\dfrac{\pi}{18}$rad et on le libère sans vitesse initiale à l'instant t=0

au moment de passage du pendule par sa position d'équilibre stable à l'instant : $t=\dfrac{T_o}{4}$

$$\dot{\theta}=-\frac{2.\pi}{T_o}.\theta_o.\sin\left(\frac{2.\pi}{T_o}.\frac{T_o}{4}\right)=-\frac{2.\pi}{T_o}.\theta_o.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2.\pi}{T_o}.\theta_o \quad\Rightarrow\quad v=d.\dot{\theta}=-\frac{2.\pi.d}{T_o}.\theta_o \text{ et } v^2=\frac{4.\pi^2.d^2}{T_o^{\,2}}.\theta_o^{\,2},$$

donc en remplaçant dans R_n : $\quad R_n=(m_1+m_2).\left(g_o+\dfrac{4.d.\pi^2.\theta_o^{\,2}}{T_o^{\,2}}\right)=0{,}2.\left(9{,}8+\dfrac{4.\times 0{,}5\times 10\times 10}{18^2\times 2^2}\right)=2N$

D'autre part on a : $\ \ddot{\theta}=-\dfrac{4.\pi^2}{T_o^{\,2}}.\theta_o.\cos\left(\dfrac{2.\pi}{T_o}.t\right)$, la position d'équilibre à l:instant $t=\dfrac{T_o}{4}$, $\ddot{\theta}=-\dfrac{4.\pi^2}{T_o^{\,2}}.\theta_o.\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

donc en remplaçant dans R_t : $\quad R_t=0 \quad$, donc : $R=R_n=2N$

---

2) 2-1- <u>L'énergie mécanique du pendule pesant :</u> $E_m=E_c+E_{pp}+E_{pe}$

- $E_{pp}=m.g.z_G+C$ avec $E_{pp}=0$ lorsque $z=0$ donc $C=0$ d'où: $E_{pp}=m.g.z_G$ avec: $z=d(1-\cos\theta)$

, dans le cas des petites vibrations : $\cos\theta=1-\dfrac{\theta^2}{2}$ et: $m=m_1+m_2 \Rightarrow E_{pp}=(m_1+m_2).g.d.\dfrac{\theta^2}{2}$

- $E_{pe}=\dfrac{1}{2}.C.\theta^2+C$, avec $E_{pe}=0$ lorsque : $\theta=0$, donc : $C=0$ d'où: $E_{pe}=\dfrac{1}{2}.C.\theta^2$

- $E_c=\dfrac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2$

L'énergie mécanique du pendule pesant dans le cas des petites vibrations : $E_m=E_c+E_{pp}+E_{pt}$

$$=\frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2+\frac{(m_1+m_2).g.d.\theta^2}{2}+\frac{1}{2}.C.\theta^2$$

$$=\frac{J_\Delta}{2}.\dot{\theta}^2+\frac{(m_1+m_2).g.d+C}{2}.\theta^2$$

$\Rightarrow E_m=\left(\dfrac{J_\Delta}{2}\right).\dot{\theta}^2+\left(\dfrac{(m_1+m_2).g.d+C}{2}\right).\theta^2 \quad$ qui est sous la forme $\quad E_m=a.\dot{\theta}^2+b.\theta^2 \quad\Rightarrow\quad a=\left(\dfrac{J_\Delta}{2}\right)$

, et : $b=\left(\dfrac{(m_1+m_2).g.d+C}{2}\right)$.

2-2- Les frottements sont négligeables donc l'énergie mécanique est constante, donc : $\dfrac{dE_m}{dt}=0 \Rightarrow \dfrac{d(a.\dot{\theta}^2+b.\theta^2)}{dt}=0$

$$\Rightarrow a.(2.\dot{\theta}.\ddot{\theta})+2.b.\theta.\dot{\theta}=0 \quad\Rightarrow\quad 2.\dot{\theta}(a.\ddot{\theta}+b.\theta)=0 \quad\Rightarrow\quad a.\ddot{\theta}+b.\theta=0 \quad \text{donc} \quad \ddot{\theta}+\frac{b}{a}.\theta=0$$

C'est l'équation différentielle du mouvement que vérifie l'angle θ en fonction de a et b .

Dans ce cas la période propre: :

$$T'_o = 2.\pi.\sqrt{\frac{a}{b}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{J_\Delta}{(m_1 + m_2).g.d + C}}$$

2-3-Pour corriger le décalage temporel : ΔT , il faut que : $\Delta T = 0 \quad \Rightarrow \quad T'_o = T_o$

$$2.\pi.\sqrt{\frac{J_\Delta}{(m_1 + m_2).g.d + C}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{J_\Delta}{(m_1 + m_2).g_o.d}} \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2).g.d + C = (m_1 + m_2).g_o.d$$

$$\Rightarrow \quad C = (m_1 + m_2)d(.g_o - g) = 0,2 \times 0,5 \times (9,8 - 9,78) = 2.10^{-3}\,N.m/rad$$

SBIRO Abdelkrim Pour toute observation contactez-moi
sbiabdou@yahoo.fr